

Aufgabe 1 (Taylorpolynom im 2D). Berechnen Sie das Taylorpolynom vom Grad 1 für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = x^2 + y^3$$

am Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (1, 2)^T$.

Ergebnis: $T_{f,1}(x, y) = 9 + 2 \cdot (x - 1) + 12 \cdot (y - 2)$

Lösung:

Das Taylorpolynom vom Grad 1 einer Funktion $f(x, y)$ bei (x_0, y_0) ist von der allgemeinen Form

$$T_{f,1}(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) .$$

Der Funktionswert in Punkt $(1, 2)$ ist $f(1, 2) = 9$.

Die partiellen Ableitungen von f lauten :

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$; $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2$; $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 12$

Damit erhält man das Taylorpolynom von f bei $(x_0, y_0) = (1, 2)$ als

$$\begin{aligned} T_{f,1}(x, y) &= f(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) \cdot (x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) \cdot (y - 2) \\ &= 9 + 2 \cdot (x - 1) + 12 \cdot (y - 2) . \end{aligned}$$

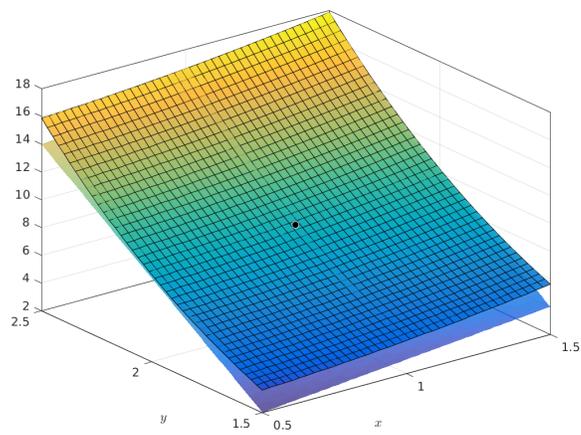


Abbildung 1: Graph der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^3$ sowie des Taylorpolynoms $T_{f,1}$.